

- جداء الحلقات البوليانية :

لتكن $(A_i)_{i \in I}$ أسرة من الحلقات البوليانية ، يمكننا أن نعرف على مجموعة الجداء $A = \prod_{i \in I} A_i$ عملية الجداء : $(x_i)(y_i) = (x_i y_i)$.

بصورة يمكن بناء حلقة بوليانية على A حيث :

$$(x_i) \vee (y_i) = (x_i \vee y_i)$$

$$(x_i)' = (x'_i)$$

$$(x_i) + (y_i) = (x_i)(y_i)' \vee (x_i)'(y_i) = (x_i y_i)' \vee (x'_i y_i)$$

يمكننا أن نعرف الحلقة البوليانية A^n (حيث n عدد طبيعي مختلف عن الصفر) انطلاقاً من الحلقة البوليانية A .

مثال : اذا كانت $U = \{0, 1\}$ فإن U^2 تكون حلقة بوليانية مؤلفة من أربعة عناصر يمكن أن نمثلها بالشكل :

(U^2): (1,1) ، (1,0) ، (0,1) ، (0,0)

ملاحظة :

علاقة الترتيب المعرفة على حلقة الجداء هي ترتيب الجداء أي أن :

$$(x_i) \leq (y_i) \Leftrightarrow (x_i)(y_i) = (x_i) \Leftrightarrow (x_i y_i) = (x_i) \Leftrightarrow$$

$$x_i y_i = x_i \ , \forall i \in I \Leftrightarrow x_i \leq y_i \ , \forall i \in I$$

ملاحظة :

اذا كانت $A = \prod_{i \in I} A_i$ فإنه من أجل أي $k \in I$ يمكننا أن نعرف المسقط k بأنه صورة التطبيق الإسقاط P_k من A على A_k المعرف بالشكل التالي :

$$P_k(x_i) = x_k$$

إن P_k يكون ابيمورفيزم (مورفيزم غامر) .

$P_1(1,3) = 1$
$P_2(1,3) = 3$
مسقط الأول

- المرشحات و المثاليات :

تذكرة : لقد رأينا المرشحات والمثاليات في الفصل السابق بشكل مجرد سابقاً لكونه صحيحاً في جبر بول ، سنلخص هنا التعاريف والخواص الأساسية في جبر بول.

- المرشحة F هي كل مجموعة جزئية غير خالية من A تحقق :

① اذا كانت $x \in F$ ، $y \geq x$ فإن $y \in F$

② اذا كان $x, y \in F$ فإن $x \wedge y \in F$

③ $1 \in F$ (هذا الشرط تحقق فقط في جبر بول) .

الموضوع .... التاريخ ◯◯ ٢٠١

المرشح المتمم :

(4) $0 \notin F$ لكي نقول بأن F مرشحة فعلية أي أن $A \neq F$.

المرشحة الأساسية المولدة بـ $a \in A$ هي : $F_a = \{x \in A ; x \geq a\}$

ملاحظات :

* $F_a = [a, 1]$ (وهي مجموعة العناصر التي تكون أكبر تساوي a وأصغر تساوي 1) .

* $F_a = A \vee a = \{x \vee a ; x \in A\}$ وذلك لأن :

- $\forall x \in F_a \Rightarrow x \geq a ; x \in A \Rightarrow x = x \vee a \in A \vee a$.

- $\forall y \in A \vee a \Rightarrow$ يوجد $x \in A$ بحيث يكون $y = x \vee a \Rightarrow y \geq a \Rightarrow y \in F_a$

* المرشحة المولدة بالمجموعة الجزئية G من A هي :

$F_G = \{x \in A ; x \geq a_1 a_2 \cdots a_n , \forall n , \forall i ; a_i \in G\}$

وتدعى G مجموعة $\wedge$ - متوافقة إذا كانت F_G مرشحة فعلية .

* المثالية I من A هي أي مجموعة جزئية غير خالية من A تحقق :

(1) $\forall x \in I$ & $y \leq x$ فإن $y \in I$.

(2) $\forall x, y \in I$ فإن $x \vee y \in I$.

(3) $0 \in I$ (تتحقق في الحلقة البوليانية) .

وتكون المثالية I فعلية إذا وفقط إذا كان $1 \notin I$:

* المثالية المولدة بالعنصر a هي :

$I_a = \{x \in A ; x \leq a\} = [0, a] = Aa = \{xa ; x \in A\}$

* المثالية المولدة بالمجموعة الجزئية G من A :

$I_G = \{x \in A ; x \leq a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n , \forall n , \forall i ; a_i \in G\}$

تدعى G مجموعة $\vee$ - متوافقة إذا كانت I_G مثالية فعلية .

مثاليات المشبكة ومثاليات الحلقة :

لقد رأينا سابقاً تعريف المثالية من المشبكة وأما في الحلقة التبديلية فإن المثالية تعرف بشكل آخر .

المثالية J من الحلقة التبديلية A هي مجموعة جزئية غير خالية من A تحقق :

(1) J زمرة جزئية جمعية من A ،

(2) إذا كانت $x \in J , a \in A$ فإن : $ax \in J$.

مبرهنة: إن مفهوم المثالية في جبر بول A باعتبار A شبكة هي نفس مفهوم المثالية باعتبار A حلقة.

- البرهان:
- إذا كانت I مثالية بمفهوم الشبكة:

• نفرض أن $x,y \in I$ عندئذ: $x+y=(xy')\vee(x'y)$.

$xy' \le x$ و $x\in I$ و I مثالية $\Leftarrow xy' \in I$ } وبما أن I شبكة $\Leftarrow$

$x'y \le y$ و $y\in I$ و I مثالية $\Leftarrow x'y\in I$

$\Leftarrow (xy')\vee(x'y)\in I$ (لأن I مثالية).

ومنه نستنتج أن $x+y\in I$

• $\forall x\in I$ فإن نظير x هو x نفسه، بالتالي فإن نظير x ينتمي إلى I.

ومنه نستنتج أن I زمرة جزئية من A (بالنسبة لعملية الجمع).

• ليكن $x\in I$، $a\in A$ فإن $ax\le x$ و I مثالية $\Leftarrow ax\in I$

ومنه نستنتج أن I هي مثالية بمفهوم الحلقة.

- لتكن J مثالية بمفهوم الحلقة:

• ليكن $x\in J$ و $y\le x$ $\Leftarrow y=yx\in J \Leftarrow y\in J$. ($y\in A$)

• $\forall x,y\in J$ فإن:

$x\vee y=x+y+xy\in J$ (لأن J زمرة جزئية)

• $0\in J$ (لأن J زمرة جزئية جمعية من A يجب أن تحوي الحيادي).

ومنه نستنتج أن J هي مثالية بمفهوم الشبكة.

- إذاً يمكن أن نستخدم هذه المطابقة بين مفهومي المثالية.

- الثنوية بين المرشحات والمثاليات:

لقد رأينا سابقاً بأنه إذا كانت G مجموعة جزئية من حلقة بوليانية A فإن:

$$G'=\{x' ; x\in G\}=\{x\in A ; x'\in G\}$$

- مبرهنة:

☐ I مثالية يكافئ أن I' مرشحة. (I' متممة I)

☐ I مثالية فعلية يكافئ I' مرشحة فعلية.

☐ I مثالية رئيسية تساوي Aa يكافئ I' مرشحة رئيسية تساوي $A\vee a'$

• I مثالية مولدة بالمجموعة G يكافئ أن I' مرشحة مولدة بالمجموعة G'.

البرهان:

• إذا كانت I مثالية، لتكن $x \in I'$ و $x \leq y$ ⇐ $x' \in I$ و $y' \leq x'$
و I مثالية فرضاً ⇐ $y' \in I$ ⇐ $y \in I'$
لتكن $x, y \in I'$ ⇐ $x', y' \in I$ و I مثالية (فرضاً) ⇐ $x' \vee y' \in I$ ⇐
⇐ $xy \in I$ ($x \wedge y \in I$).
I مثالية في جبر بول ⇐ $0 \in I$ ⇐ $0' = 1 \in I'$ ومنه نستنتج أن I' مرشحة.
وبنفس الطريقة تماماً يكون البرهان أنه إذا كانت I' مرشحة فإن I مثالية.

• I مثالية فعلية ⇔ $1 \notin I$ ⇔ $0 \notin I'$ ⇔ I' مرشحة فعلية.

• إذا كانت I مثالية أساسية مولدة بـ a ⇔ $\forall x \in I$ فإن $x \leq a$ ⇔
$\forall x' \in I'$ فإن $x' \geq a'$ ⇔ I' مرشحة أساسية مولدة بالعنصر a'.

• إذا كان $I = I_G$ فإنه $\forall x \in I_G$ فإن: $a_1, \dots, a_n \in G$ ، $x \leq a_1 \vee \dots \vee a_n$ ⇐ $\forall x' \in I'$
$x' \geq a_1' \dots a_n'$ ⇔ I' مرشحة مولدة بـ G'.

فوق المرشحات والمثاليات العظمى:

فوق المرشحات: لتكن A حلقة بوليانية، من المعروف بأنها تملك فوق مرشحات (أي مرشحات فعلية عظمى)، وأن كل مرشحة فعلية محتواة في فوق مرشحة، التمثيل لفوق المرشحات الذي رأيناه على الشبكة يساعدنا بالحصول على النتيجة التالية:

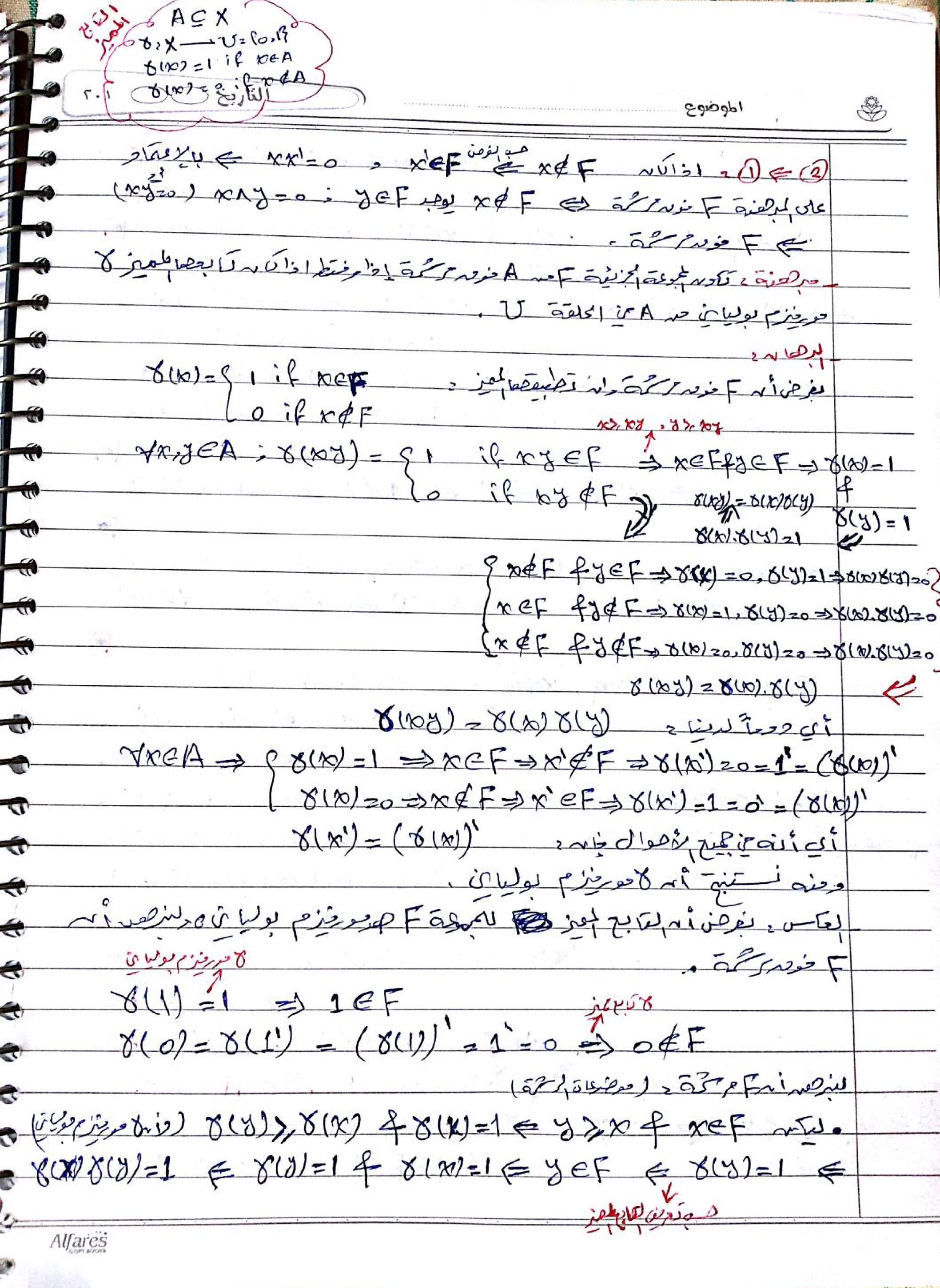
ملاحظة:

إذا كانت F مرشحة فعلية فإن القضيتين التاليتين متكافئتين:

① F فوق مرشحة.

② من أجل أي $x \notin F$ فإن: $x' \in F$.

البرهان: ① ⇐ ②: لقد رأينا سابقاً بأنه إذا كانت F فوق مرشحة، $x \notin F$
(من ملاحظة سابقة) توجد $y \in F$ بحيث يكون $x \wedge y = 0$ ⇐ $y \leq x'$ ⇐
$x' \in F$ (لأن F مرشحة و $y \in F$).



التابع المميز: $A \subseteq X$

$\gamma : X \longrightarrow U = \{0,1\}$

$\gamma(x) = 1$ if $x \in A$

$\gamma(x) = 0$ if $x \notin A$

② ⇐ ① : اذا كان $x \notin F$ ⇐ حسب الفرض $x' \in F$ ، $xx' = 0$ ⇐ بالاعتماد على المبرهنة F فوق مرشحة ⟺ $x \notin F$ يوجد $y \in F$: $x \wedge y = 0$ $(xy = 0)$

⇐ F فوق مرشحة.

مبرهنة: تكون المجموعة الجزئية F من A فوق مرشحة إذا وفقط إذا كان التابع المميز γ مورفيزم بوليانياً من A في الحلقة U.

البرهان: نفرض أن F فوق مرشحة وأن تابعها المميز:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in F \\ 0 & \text{if } x \notin F \end{cases}$$

$$\forall x,y \in A ;\ \gamma(xy) = \begin{cases} 1 & \text{if } xy \in F \Rightarrow x \in F \ \& \ y \in F \Rightarrow \gamma(x) = 1 \ \& \ \gamma(y) = 1 \Rightarrow \gamma(x)\cdot\gamma(y) = 1 \Rightarrow \gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y) \\ 0 & \text{if } xy \notin F \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \notin F \ \& \ y \in F \Rightarrow \gamma(x) = 0,\ \gamma(y) = 1 \Rightarrow \gamma(x)\gamma(y) = 0 \\ x \in F \ \& \ y \notin F \Rightarrow \gamma(x) = 1,\ \gamma(y) = 0 \Rightarrow \gamma(x)\cdot\gamma(y) = 0 \\ x \notin F \ \& \ y \notin F \Rightarrow \gamma(x) = 0,\ \gamma(y) = 0 \Rightarrow \gamma(x)\cdot\gamma(y) = 0 \end{cases}$$

$\Leftarrow \gamma(xy) = \gamma(x)\cdot\gamma(y)$

أي وجدنا لدينا: $\gamma(xy) = \gamma(x)\gamma(y)$

$$\forall x \in A \Rightarrow \begin{cases} \gamma(x) = 1 \Rightarrow x \in F \Rightarrow x' \notin F \Rightarrow \gamma(x') = 0 = 1' = (\gamma(x))' \\ \gamma(x) = 0 \Rightarrow x \notin F \Rightarrow x' \in F \Rightarrow \gamma(x') = 1 = 0' = (\gamma(x))' \end{cases}$$

أي أنه في جميع الأحوال لدينا: $\gamma(x') = (\gamma(x))'$

ومنه نستنتج أن γ مورفيزم بولياني.

بالعكس: نفرض أن التابع المميز للمجموعة F هو مورفيزم بولياني ولنبرهن أن F فوق مرشحة.

$\gamma(1) = 1$ (γ مورفيزم بولياني) $\Rightarrow 1 \in F$

$\gamma(0) = \gamma(1') = (\gamma(1))' = 1' = 0$ (γ تابع مميز) $\Rightarrow 0 \notin F$

لنبرهن أن F مرشحة: (موضوعات المرشحة)

• بالعكس $x \in F$ و $y \geq x$ ⇐ $\gamma(x) = 1$ و $\gamma(y) \geq \gamma(x)$ (وذلك لأن γ مورفيزم بولياني)

⇐ $\gamma(y) = 1$ ⇐ $y \in F$ (حسب تعريف التابع المميز) ⇐ $\gamma(x) = 1$ و $\gamma(y) = 1$ ⇐ $\gamma(x)\gamma(y) = 1$

كل مرشحة مغلقة محتواة في فوق مرشحة

⇐ $\gamma(xy)=1$ ⇐ $xy\in F$ ومنه فإن F مرشحة مغلقة.

لنبرهن أنها فوق مرشحة: (لأنه هومومورفيزم بولياني (فرضاً))

لتكن $x\notin F$ ⇐ $\gamma(x)=0$ ⇐ $\gamma(x')=(\gamma(x))'=0'=1$

⇐ $x'\in F$ وحسب مبرهنة سابقة فإن F تكون فوق مرشحة.

مبرهنة:

كل مرشحة مغلقة F تساوي تقاطع جميع فوق المرشحات الحاوية لها.

وكحالة خاصة: تقاطع جميع فوق المرشحات في A تساوي $\{I\}$. ← مرشحة مغلقة

البرهان:

لتكن U_F أسرة جميع فوق المرشحات الحاوية للمرشحة F، فإن: $F\subseteq\bigcap_{U\in U_F}U$ واضح.

لتكن $x\in\bigcap_{U\in U_F}U$ ⇐ $x\in U$ وذلك من أجل أي $U\in U_F$، لنفرض أن: $G=F\cup\{x'\}$

• إذا كانت G متوافقة ⇐ G تولد مرشحة مغلقة هي F_G وهي محتواة في فوق مرشحة U'.

ويكون $x'\in U'$، كما أن: $F\subseteq G\subseteq F_G\subseteq U'$ ⇐ $x\in U'$ ⇐ $0=xx'\in U'$

وهذا تناقض لأن U' فوق مرشحة (أي أنها مغلقة وهي لا تحوي 0).

وبالتالي ينتج أن G تكون A- غير متوافقة ⇐ يوجد $y\in F$ بحيث يكون: $yx'=0$

⇐ $y\le x$ ⇐ $x\in F$ ومنه نستنتج أن: $\bigcap_{U\in U_F}U\subseteq F$

ومن الاحتوائين ينتج المساواة: $F=\bigcap_{U\in U_F}U$

الحالة الخاصة: واضح

((لأن $\{I\}$ مرشحة مغلقة محتواة في جميع فوق المرشحات، وبالتالي فإن تقاطع جميع فوق المرشحات يساوي $\{I\}$ حسب المبرهنة)).

المثاليات العظمى:

كما ذكرنا أن فوق المرشحة يكون محققاً لفضل الثنوية من أجل المثاليات العظمى، وذلك استناداً إلى المبرهنة التالية.

مبرهنة: تكون I مثالية عظمى إذا وفقط إذا كانت I' فوق مرشحة من الجبر A حيث يكون: $I'=C_A I$.



- البرهان: لتكن I مثالية عظمى، لقد أثبتنا سابقاً أن I' مرشحة فعلية، وإذا كانت F مرشحة فعلية أخرى حيث $I' \subseteq F \Rightarrow I \subseteq F' \Rightarrow I = F'$ (لأن I أعظمية)

$\Rightarrow I' = F$ ومنه نستنتج أن I' مرشحة فعلية أعظمية حسب تعريف مرشحة،

- بالعكس: لنفرض أن I' فوق مرشحة $\Rightarrow$ حسب ما أثبتنا سابقاً I مثالية فعلية (لأن I' مرشحة فعلية).

لتكن J مثالية فعلية أكبر أي أن $I \subseteq J \Rightarrow I' \subseteq J'$ ولكن I' فوق مرشحة $\Rightarrow$

$I' = J' \Rightarrow I = J \Rightarrow I$ مثالية أعظمية.

- كما أنه إذا كانت I مثالية عظمى وكانت $x \in C_A I \Leftrightarrow x \notin I \Leftrightarrow x' \notin I' \Leftrightarrow x \in I'$

ومنه نستنتج $I' = C_A I$.